الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: علوم تجريبية
المادة: رياضيات
المدّة: 3 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ : $U_0 = 1$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{e^n U_n + e}$

1. أُحسب كُلّا من U_1 و U_2
2. أ. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 0$
   ب. بيّن أنّ (U_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.
3. المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \dfrac{e^{-n}}{U_n}$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها e^{-1} ثمّ استنتج عبارة V_n بدلالة n
   ب. أُكتب عبارة U_n بدلالة n ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
4. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S_n = U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n$
   • أُحسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{e}{e-1}$

التمرين الثاني (4 ن)

صندوق غير شفّاف به 5 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها كريّتين خضراوين تحملان الرّقمين: 0 و 1 ، كريّتين حمراوين تحملان الرّقمين: 1 و 2 ، وكريّة بيضاء تحمل الرقم: 2.

نسحب عشوائيا من الصندوق كريّتين في آن واحد.

1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.
   أ. A: " الحصول على كريّتين مختلفتين في اللّون ".
   ب. B: " الحصول على كريّة بيضاء على الأقل ".
2. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب مجموع الرقمين المحصّل عليهما.
   أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$، ثمّ عرّف قانون احتماله.
   ب. استنتج احتمال الحدث $(C_X^2 = 1)$
3. نُضيف إلى الصّندوق k كريّة تحمل الرقم 1 حيث $k \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا كريّتين على التّوالي بدون إرجاع.
   • عيّن قيمة k التي يكون من أجلها احتمال الحصول على عددين جداؤهما معدوم هو $\dfrac{1}{15}$

التمرين الثالث (5 ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

أجب بصحيح أو خاطئ مع التّبرير في كلّ حالة من الحالات الآتية.

1. المعادلة $\overline{z+i}-i=0$ تقبل حلّا وحيدا في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$

2. مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z+\overline{z}=0$ هي حامل محور الفواصل.

3. العدد المركّب $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1962}$ يساوي i

4. إذا كان $z=1+i$ فإنّ المتتالية العددية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n=\log|z|^n$ هي متتالية حسابية.

5. إذا كان z عددا مركّبا حيث $|z|=1$ فإنّ $|z-4|=|4\overline{z}-1|$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الجدول المقابل هو جدول تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي $g(x)=x+\dfrac{2\ln x-1}{x}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

• أُحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ حيث $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=1\,cm$.

1. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب. بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثّل للدّالة $\ln$

3. أنشئ كُلّا من (γ) و (C_f)

4. نعتبر λ عددا حقيقياً حيث $\lambda>1$ ، نرمز بـ $\mathcal{S}(\lambda)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=1$ و $x=\lambda$

أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $\displaystyle\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{1}{\lambda}-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$

ب. استنتج أنّ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{S}(\lambda)=\mathcal{S}(e^{-1})\;cm^2$

5. الدّالة العددية h معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2}-|\ln x|$

• اشرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب الإنشاء)

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

في المدرسة العليا للأساتذة بورقلة يُراد تشكيل لجنة لتمثيل الطلبة تضمّ رئيسا، نائباً وكاتباً، من بين خمسة طلبة ذكور، وأربع طالبات إناث إحداهن اسمها يُسرى.

1. أُحسب احتمال كُلّا من الحدثين الآتيين.
   أ. الحدث A: " أعضاء اللّجنة من جنسين مختلفين ".
   ب. الحدث B: " يُسرى رئيسا للجنة ".
2. بيّن أنّ $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\dfrac{1}{84}$ ثمّ استنتج $P_{\overline{A}}\left(B\right)$ احتمال الحدث B علما أنّ $\overline{A}$ محقّق.
3. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كلّ لجنة بعدد الذكور فيها.
   أ. بيّن أنّ $P\left(X=1\right)=\dfrac{5}{14}$ و $P\left(X=2\right)=\dfrac{10}{21}$
   ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
   ج. أُحسب $E\left(X\right)$ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X ثمّ استنتج $E\left(1962X-1245\right)$

التمرين الثاني (4 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير.

1. الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=2x+\ln\left(1+e^{-4x}\right)$ هي دالة
   أ) زوجية.		ب) فردية.		ج) لا زوجية ولا فردية.
2. مجموعة حلول المعادلة $\log\left(x-\sqrt{3}\right)+\log\left(x+\sqrt{3}\right)=0$ ذات المجهول الحقيقي x هي
   أ) $\{-2;2\}$		ب) $\{2\}$		ج) $\{-10;10\}$
3. قيمة العدد الحقيقي β الذي يحقّق $\displaystyle\int_0^{\beta} xe^x dx=1$ هي
   أ) 1		ب) e		ج) -1
4. حلّ المعادلة التفاضلية $y'-1962y=2025$ الذي يحقّق $y\left(0\right)=0$ هو دالة
   أ) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$		ب) ثابتة على $\mathbb{R}$		ج) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

التمرين الثالث (5 ن)

الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$

ونعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $U_{n+1}=f\left(U_n\right)$

1. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.
2. أ. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n>0$
   ب. أُدرس اتجاه تغيّر (U_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3. أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

ب. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n \leq \frac{1}{n}$

ج. أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \frac{2}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \cdots + \frac{2}{U_n}$

• بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n \geq n\,(n+1)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x + x$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x) - 2$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x-1)\left(e^{-x} - 1\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{j}\right\| = 1\,cm$.

1. أ. أُحسب كلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2 - g(x)}{e^x}$

ج. استنتج أنّ f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O

4. أ. أنشئ كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)

ب. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x\ln m$ حلّين بالضّبط.

5. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $\lambda > 1$ ، نرمز بـ $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = -x + 1$ ، $x = 0$ و $x = \lambda$

• باستعمال المكاملة بالتجزئة أُحسب $\int_1^{\lambda} xe^{-x}dx$ ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1}\,cm^2$

انتهى الموضوع الثاني